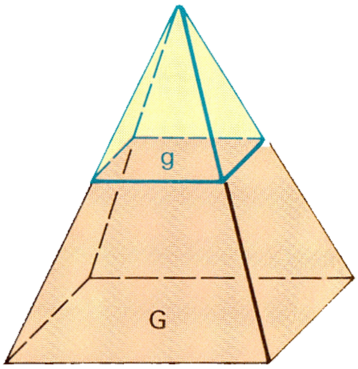
Aufgaben zur Pyramide

1 Ein Pyramidenstumpf (siehe folgende Figur) hat die Höhe h = 4,0 cm und quadratische Grund- und Deckfläche mit den Inhalten $G = 64\ cm^2$ und $g = 25\ cm^2$.

Die abgeschnittene Pyramide hat eine Höhe von $\frac{20}{3}$.

Berechnen Sie das Volumen des Pyramidenstumpfes.

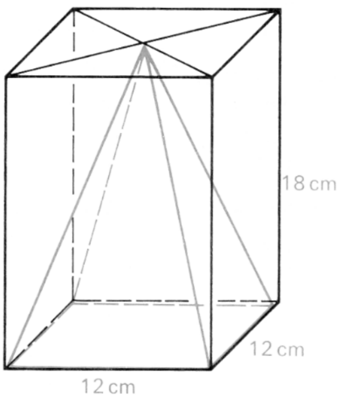


2.0 Aus einem Quader mit quadratischer Grundfläche wird die größtmögliche gerade Pyramide gefertigt (Maßangabe siehe folgende Figur).

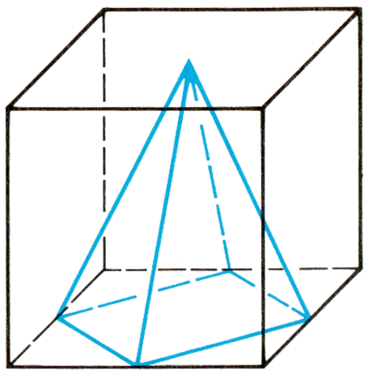
2.1 Berechnen Sie das Volumen des „Abfalls“.

2.2 Bestimmen Sie, in welchem Verhältnis das Pyramidenvolumen zu dem Volumen des Abfalls steht.

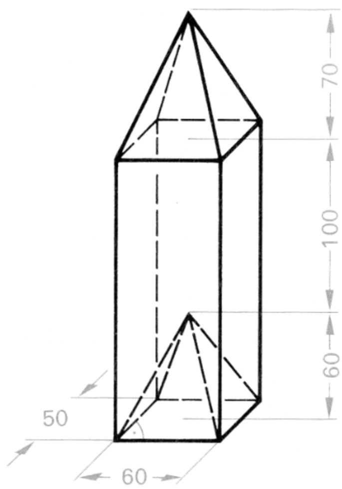
2.3 Berechnen Sie die Oberfläche der Pyramide.



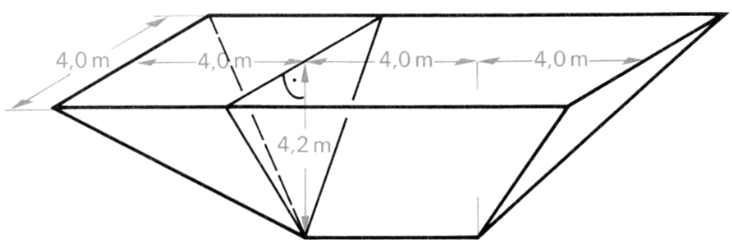
3 Die Kante eines Würfels ist 6 cm lang. Diesem Würfel ist eine Pyramide so einbeschrieben, dass ihre Spitze mit dem Mittelpunkt der oberen Würfelfläche zusammenfällt. Die Mittelpunkte der Würfelgrundkanten sind Ecken der Pyramidengrundfläche (siehe Figur).
Berechnen Sie Volumen und Oberfläche der Pyramide.



4 Ein Werkstück hat das in folgender Figur angegebene Aussehen.
Berechnen Sie sein Volumen.



5 Ein Trog hat die in folgender Figur angegebene Form mit den eingetragenen Maßen.
Berechnen Sie, wie viel Wasser der Trog fasst.



6.0 Ein Zelt soll die Form einer quadratischen Pyramide mit der Grundkantenlänge a = 2,2 m und der Höhe h = 2,5 m erhalten.

6.1 Berechnen Sie, wie viel Quadratmeter Zeltstoff man zur Herstellung (ohne Boden) benötigt, wenn man mit 12,5 % Verschnitt rechnen muss.

6.2 Ermitteln Sie, wie viel Meter Gestänge man benötigt, wenn diese entlang der Seitenkanten verlaufen soll.

Lösungen

1

$$V_{Stumpf} = V_{ganze\,Pyramide} - V_{abgeschnittene\,Pyramide}$$

$$\Rightarrow V_{ganze\,Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot (4+6,67) = \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 10,67 = 227,63\,cm^3$$

$$\Rightarrow V_{abgeschnittene\,Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 6,67 = 55,58\,cm^3$$

$$\Rightarrow V_{Stumpf} = 227,63 - 55,58 = 172,05\,cm^3$$

2.1

$$V_{Abfall} = V_{Quader} - V_{Pyramide}$$

$$V_{Quader} = 12 \cdot 12 \cdot 18 = 2592\,cm^3$$

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 \cdot 18 = 864\,cm^3$$

$$\Rightarrow V_{Abfall} = 2592 - 864 = 1728\,cm^3$$

2.2 $\frac{V_{Pyramide}}{V_{Abfall}} = \frac{864}{1728} = \frac{1}{2}$

2.3

$$O_{Pyramide} = \text{Grundfläche} + \text{Mantelfläche}$$

Mantelfläche: vier gleichschenklige Dreiecke

$$A = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot h_{Seitendreieck} \qquad (h_{Seitendreieck})^2 = (h_{Pyramide})^2 + 6^2 \;\Rightarrow (h_{Seitendreieck})^2 = 18^2 + 6^2 = 360$$

$$\Rightarrow h_{Seitendreieck} = 18,97\,cm$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 18,97 = 113,82\,cm^2 \quad \Rightarrow \text{Mantelfläche} = 4 \cdot 113,82 = 455,28\,cm^2$$

$$\Rightarrow O = 144 + 455,28 = 599,28\,cm^2$$

3

$$\text{Grundkante}: \ 3^2 + 3^2 = (\text{Grundkante})^2 \ \Rightarrow \text{Grundkante} = \sqrt{18} = 4{,}24\,\text{cm}$$

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot 4{,}24 \cdot 4{,}24 \cdot 6 = 35{,}96\,\text{cm}^3$$

$$\text{Oberfläche}: \ O = \text{Grundfläche} + \text{Mantelfläche}$$

$$\text{Mantelfläche} = 4 \cdot A_{\text{Seitendreieck}}$$

$$A_{\text{Seitendreieck}} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_{\text{Seitendreieck}}$$

$$(h_{\text{Seitendreieck}})^2 = (h_{\text{Pyramide}})^2 + (\frac{1}{2} \cdot 4{,}24)^2 = 36 + 4{,}49 = 40{,}49$$

$$\Rightarrow h_{\text{Seitendreieck}} = 6{,}36\,\text{cm} \qquad \Rightarrow A_{\text{Seitendreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 4{,}24 \cdot 6{,}36 = 13{,}48\,\text{cm}^2$$

$$\Rightarrow \text{Mantelfläche} = 4 \cdot 13{,}48 = 53{,}92\,\text{cm}^2$$

$$\Rightarrow \text{Oberfläche} = (4{,}24)^2 + 53{,}92 = 71{,}90\,\text{cm}^2$$

4

$$V_{\text{Werkstück}} = V_{\text{Quader}} + V_{\text{Pyramide}\,1} - V_{\text{Pyramide}\,2}$$

$$V_{\text{Quader}} = 50 \cdot 60 \cdot 160 = 480000$$

$$V_{\text{Pyramide}\,1} = \frac{1}{3} \cdot 50 \cdot 60 \cdot 70 = 70000$$

$$V_{\text{Pyramide}\,2} = \frac{1}{3} \cdot 50 \cdot 60 \cdot 60 = 60000$$

$$\Rightarrow V_{\text{Werkstück}} = 480000 + 70000 - 60000 = 490000$$

5

Trog setzt sich zusammen aus einem Prisma und zwei Teilpyramiden,
die sich zu einer Pyramide zusammen setzen lassen.

$$V_{\text{Prisma}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4{,}2 \cdot 4 = 33{,}6\,\text{m}^3$$

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 4 \cdot 4{,}2 = 44{,}8\,\text{m}^3$$

$$V_{\text{Trog}} = 33{,}6 + 44{,}8 = 78{,}4\,\text{m}^3 = 78400\,\text{dm}^3 = 78400\,\text{l}$$

6.1

$$A = 4 \cdot A_{\text{Dreieck}}$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}2 \cdot h_{\text{Dreieck}} \qquad \left(h_{\text{Dreieck}}\right)^2 = \left(1{,}1\right)^2 + \left(2{,}5\right)^2 = 7{,}46 \quad \Rightarrow h_{\text{Dreieck}} \approx 2{,}73\,\text{m}$$

$$\Rightarrow A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}2 \cdot 2{,}73 = 3{,}003\,\text{m}^2 \qquad \Rightarrow A = 4 \cdot 3{,}003 = 12{,}01\,\text{m}^2$$

$\Rightarrow$ Es wird insgesamt $12{,}01 \cdot 1{,}125 = 13{,}51\,\text{m}^2$ Zeltstoff benötigt.

Jochen Weber

6.2

Länge einer Seitenkante:

$s^2 = \left(h_{\text{Dreieck}}\right)^2 + \left(1{,}1\right)^2 = \left(2{,}73\right)^2 + \left(1{,}1\right)^2 = 8{,}66 \quad \Rightarrow s \approx 2{,}94\,\text{m}$

Gesamtlänge: $4 \cdot 2{,}94 = 11{,}76\,\text{m}$